

## ფირმის მდგრადობის არაწრფივი დინამიკური მოდელი

### დემურ გიორხელიძე

გრიგოლ რობაქიძის სახელობის უნივერსიტეტი  
demur.giorkhelidze@gruni.edu.ge

**რეზიუმე.** სტატიაში განხილულია ფირმის მდგრადობის არაწრფივი დინამიკური მოდელი, მდგომარეობის ცვლადებისთვის მიღებულია განტოლებები შესაბამისი საწყისი პირობებით. მდგომარეობის ცვლადებად, რომლებიც სრულად ახასიათებს ფირმის მდგომარეობას, აღებულია ფირმის ფიზიკური კაპიტალი, შრომითი რესურსები (შრომა, სამუშაო ძალა), ფირმის ვალი და მისი მოგება. მიღებული არაწრფივი დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემისათვის, სხვადასხვა მართვის პარამეტრებისას, მითითებულია ამოხსნის ალგორითმი და მდგრადობის კრიტერიუმები. არაავტონომიური სისტემისათვის მდგრადობა განიხილება ლიაპუნოვის მიხედვით.

**სამიუზო სიტყვები:** ფირმა, ფირმის მდგომარეობა, მდგომარეობის ცვლადები, იდიოსინკრეტული რისკები, არაწრფივი დიფერენციალური განტოლებები, კოშის ამოცანა, მდგრადობა ლიაპუნოვის მიხედვით

### შესავალი

როგორ აღიწეროს ფირმის საქმიანობის დინამიკა, ანუ დროში მისი მდგომარეობის ცვლადობა, რომელიც პრაქტიკულად არასდროს არის წრფივი – იგი ერთი მდგომარეობიდან, რომელიც დროის მოკლე (გარკვეულ) მონაკვეთში შეიძლება ჩაითვალოს მდგრად მდგომარეობად, გადადის არამდგრად მდგომარეობაში, დამდგომარეობათა ეს მონაცვლეობა პრაქტიკულად მუდმივი პროცესია, რადგან ფირმის მდგრადი მდგომარეობა დიდხანს არასდროს გრძელდება. ფირმის მდგომარეობების მუდმივი მონაცვლეობა/მოძრაობა ფირმის მართვის პარამეტრების მნიშვნელობების ცვლილების შედეგია იმ ინტერვალში, რა ინტერვალშიც ეს პარამეტრებია განსაზღვრული. მართვის პარამეტრები, როგორც მუდმივი სიდიდეები, შეიძლება მოიცემოდეს ეგზოგენურად; ეს პარამეტრები, რაღაც სახით, ფირმის ევოლუციის (მოძრაობის, დინამიკის) იმ განტოლებებში აისახება, რომლებიც ფირმის დინამიკური მათემატიკური მოდელის შექმნის გზით მიიღება.

ეკონომიკაში დინამიკური მოდელების გამოყენების თავისებურება (ან განსხვავებულობა) ერთი მხრივ, უკავშირდება დაშვებას გრძელვადიან პერსპექტივაში განსახილველი პროცესის (მოვლენის და ა.შ.) დეტერმინირებულობის შესახებ და დროში ქაოსური დინამიკის ფორმირება, ხოლო მეორე მხრივ, ეკონომიკური ობიექტები (მათ შორის, ფირმები), მოვლენები, პროცესები და ა.შ., დაქვემდებარებულია არაპროგნოზირებად (არაგანჭვრეტად) გარე ზემოქმედებებს, რომლებიც არარეგულარული „დარტყმების“ სახით ვლინდება და სისტემის (ობიექტის, მოვლენის, პროცესის და ა.შ.) დინამიკას (ან სისტემის დროში განვითარების ტრაექტორიას) არაგლუვს ხდის. სხვა სიტყვებით, პირველ შემთხვევაში, სრულად

დეტერმინირებული სისტემა (ჩვენს შემთხვევაში, ფირმის მდგომარეობა), დროის რაღაც ეტაპზე, პარამეტრების გარკვეული თანაფარდობებისას, შეიძლება ქაოსური გახდეს. შემუშავებულმა მოდელმა ასეთი თავისებურების დაჭერა უნდა შეძლოს. თუმცა, შევნიშნოთ, რომ ეკონომიკურ მოვლენებში ეს რთულად რეალიზდება, რადგან დროთა განმავლობაში პროცესები (მოვლენები) სტოქასტიკურ პროცესებში გადადის, - იღებს შემთხვევითი პროცესის სახეს.

რეალურ ეკონომიკურ სუბიექტებში, ისევე როგორც მთლიანად ეკონომიკურ სისტემაში, კავშირების მრავალფეროვნება (მრავალგვარობა) და მულტიკოლინეარულობა (ანუ დამოუკიდებელი ცვლადების კორელაცია) ართულებს საერთო შედეგის ანალიზს და არ იძლევა იმის საშუალებას, რომ ცალსახად ითქვას უფრო მნიშვნელოვანი და ნაკლებად მნიშვნელოვანი ფაქტორების შესახებ, რომელიც ამ შედეგზე ახდენს გავლენას. რთული სტოქასტიკური დამოკიდებულებების გავლენით, რომელიც დამახასიათებელია რეალური ეკონომიკური პროცესებისათვის, წარმოიქმნება **პრობლემა**, რომელიც დაკავშირებულია ამ კანონზომიერებებისთვის ზუსტი რაოდენობრივი და ხარისხობრივი ინტერპრეტაციის მიცემაში.

**მეორე პრობლემა** ეს არის ეკონომიკურ მოდელებში უწყვეტი სიდიდეების გამოყენება. რეალურად ეკონომიკისათვის ხშირად დამახასიათებელია დისკრეტული პროცესები, მაგრამ ფირმის დინამიკის უწყვეტ დროში აღწერა მნიშვნელოვან უპირატესობებს შეიცავს დისკრეტულ დროში მის აღწერასთან შედარებით, რადგან დისკრეტული დრო ფირმის მდგომარეობას დროის მხოლოდ გარკვეულ მომენტებში ასახავს; ამასთან, თუ ფირმის მდგომარეობის ანალიზი დროის ხანგრძლივი პერიოდის განმავლობაში ხდება, დროის ეს შუალედები, შეიძლება, ერთმანეთისგან მნიშვნელოვნად იყოს დაცილებული და დამოკიდებული იყოს დისკრეტულობის ხარისხზე. თავის მხრივ, დისკრეტულ სისტემებს გააჩნიათ თვისებები, რომლებიც ძლიერ განსხვავდება უწყვეტი სისტემების თვისებებისგან. გარდა ამისა, უწყვეტ დროში არაწრფივი დინამიკური მოდელის აგება პრობლემის სრულყოფილად გამოკვლევის საშუალებას იძლევა, რადგან მკვლევარი ჩაკეტილი ფორმით ამონახსნის მისაღებად იძულებული არ არის გაუმართლებლად დიდი გამარტივების დაშვებისათვის.

არაწრფივი დინამიკური მოდელები უწყვეტ დროში იხსნება რიცხვითი მეთოდების გამოყენებით და, მათი სწორად რეალიზაციის შემთხვევაში, პრობლემების ძალზე ფართო და რთული სპექტრის კვლევის საშუალებას იძლევა.

**ეკონომიკაში მრავალი პროცესი არამდგრადია**, - პარამეტრების ცვლილებისას დაიკვირვება მდგომარეობის ცვლის (ბიფურკაციის) ეფექტი, მდგრადობის დაკარგვა და სხვა „არასასურველი ეფექტები“. ამ თვისებების გამოვლენა აქტუალურ ამოცანას წარმოადგენს, რადგან ისინი უშუალოდ აისახება ამ ეკონომიკაში მოქმედ ეკონომიკურ აგენტებზე (კერძოდ, ფირმებსა და ინდივიდუალურ მომხმარებლებზე). ამდენად, გასაგებია, თუ რატომ არის სასურველი ეკონომიკური მოდელის უწყვეტ დროში ჩამოყალიბება და ამოხსნა.

მიუხედავად იმისა, რომ დღეისათვის გრძელდება დისკუსია ეკონომიკურ პროცესებში მცირე განზომილების ქაოსური დინამიკის არსებობის უტყუარობის შესახებ, ნაშრომში დემონსტრირებული ფირმის მათემატიკური მოდელი წარმოადგენს ინტერესს და ხელს უწყობს ეკონომიკაში მსგავსი მოვლენების კვლევის მეთოდების დამუშავებას, აგრეთვე, გაგებული და პროგნოზირებული იქნეს გარდამავალი სიტუაციები და, რიგ შემთხვევაში, ეკონომიკურ მაჩვენებლებს მიეცეს რაოდენობითი შეფასება.

**I. განსახილველი მათემატიკური მოდელის ობიექტია ფირმა**, რომელიც უშვებს ერთსა და იმავე სახის ჰომოგენურ (ერთგვაროვან) საქონელს. ზოგადად, ეკონომიკაში მოქმედი ფირმები (ისევე როგორც მომხმარებლები), რომლებიც ერთნაირები არიან *ex ante* (ანუ „მოვლენებამდე“), განსაკუთრებულ იდიოსინკრეტულ დაუზღვეველ რისკებს (შოკებს) (*idiosyncratic uninsurable risk (Shocks)*) ეჯახებიან, ანუ უნიკალურ, განსაკუთრებულ, გამორჩეულად თავისებურ ინდივიდუალურ რისკებს, დამახასიათებელს მხოლოდ ამ კონკრეტული ფირმისთვის (მომხმარებლისათვის). არაერთგვაროვნების დაზღვევა არ შეიძლება (შეუძლებელია), რომლის შემდეგაც (ანუ *ex post* („ფაქტური მოვლენის“ შემდეგ)) ისინი განსხვავდებიან ერთმანეთისგან (არაერთგვაროვანი არიან); ცხადია, განსხვავებულია მათი საწყისი შესაძლებლობებიც. ყველა ფირმას რეალობის აღქმის თავის (კერძო) იდეოსინკრეტული კონსტრუქცია აქვს, რომლის საფუძველზეც გამოაქვს აზრი (დასკვნა) და საგნებს (მოვლენებს) სუბიექტურ პერსპექტივაში აფასებს. აქედან გამომდინარე, აუცილებელი ხდება ჰეტეროგენული ეკონომიკური აგენტების მოდელის განხილვა, განსხვავებით იმისა, რაც წარმომადგენლობითი (რეპრეზენტაციული) აგენტის შემთხვევაში გვქონდა, როცა ყველა ეკონომიკური აგენტი განიხილებოდა როგორც ერთნაირი და სრულად დახასიათებადი ერთი წარმომადგენელის (რეპრეზენტაციული აგენტის) მეშვეობით. ეს ფირმები ერთმანეთთან ურთიერთობენ არასრულ ბაზრებზე და ურთიერთქმედებას გამოშვების ან/და შემოსავლების შედარების გზით ახდენენ. *ვიხილავთ ნაწილობრივი წონასწორობის მიკროეკონომიკურ მოდელს.*

პირველ ეტაპზე, ჩვენი მიზანი იქნება აღიწეროს ერთი რომელიღაც კონკრეტული ფირმის მდგომარეობა არაწრფივი დინამიკური მოდელის მეშვეობით, რომელიც, შემდგომში, მის სხვა ფირმებზე გავრცელების საშუალებას მოგვცემს და მათი შედეგების აგრეგაციისა და სხვა მნიშვნელოვანი საკითხების განხილვისათვის იქნება გამოსადეგი. ივარაუდება, რომ წარმოების ფაქტორებისა და პროდუქციის მომავალი ფასები პროგნოზირებადია სრულყოფილად და განუსაზღვრელობას ადგილი არა აქვს. ფირმა წყვეტს მოგების მაქსიმიზაციის შემდეგ ამოცანას: დროის თითოეულ მონაკვეთზე განსაზღვრავს რა შესასყიდი წარმოების ფაქტორების მოცულობას (დაკავშირებულს როგორც ხანგრძლივი საქონლის, ისე წარმოების მიმდინარე დანახარჯებთან, როგორებიცაა დანახარჯები სამუშაო ძალაზე და ა.შ.) იმ მიზნით, რომ დივიდენდის მიხედვით გადახდების საერთო ნაკადის დაყვანილი ღირებულება (*present value*) იყოს მაქსიმალური.

## II. ფირმის არაწრფივი დინამიკური მოდელი უწყვეტ დროში

ვიხილავთ ფირმას, რომლის საწარმოო ფუნქცია

$$y(t) = z(t) \cdot e(t) \cdot (k(t)^\alpha (\ell(t)h(t))^\beta)^\nu, \quad (2.1)$$

სადაც:  $y(t)$  – გამოშვება;  $z(t)$  – საერთო ფაქტორული მწარმოებლურობა (*Total Factor Productivity*, TFP), ანუ ტექნიკური პროგრესისა და სხვა ფაქტორების ერთობლიობა, რომლებიც გავლენას ახდენს ფირმის მიერ პროდუქციის გამოშვებაზე; (2.1) მოდელში ის ცხადი სახით არ არის წარმოდგენილი, როგორც ეს კაპიტალისა და შრომითი დანახარჯების შემთხვევაში გვაქვს). მისი აღწერა იხ. ქვემოთ;  $e(t)$  – მწარმოებლურობის დროში ცვალებადი იდეოსინკრეტული რისკია. ალტერნატივის სახით შეიძლება გვევარაუდა იდეოსინკრეტული რისკი, რომელიც იღებს ფორმას გადასახადებზე (სუბსიდიებზე), სამუშაო ძალასა და/ან კაპიტალზე გადასახადების სახით;  $k(t)$  – ფირმის კაპიტალი (დანახარჯები კაპიტალზე);  $\ell(t)$  – შრომითი დანახარჯები;  $\alpha$  – კაპიტალის მიხედვით ელასტიურობის კოეფიციენტი,  $\alpha \geq 0$ , ხოლო  $\beta$  – შრომის მიხედვით ელასტიურობის კოეფიციენტი,  $\beta \geq 0$ ; ჩავთვალოთ, რომ  $\alpha + \beta = 1$ ;  $\nu \in (0,1)$  – რაც ნიშნავს, რომ საწარმოო ფუნქციას აქვს მასშტაბიდან კლებადი უკუგება.

ჩავთვალოთ, რომ განსახილველ პერიოდში, პროდუქტიულობის რეალიზაცია პროგნოზირებადია და საინვესტიციო გადაწყვეტილებების მიღებას ფირმა მიმდინარე პროდუქტიულობის რეალიზაციაზე დაკვირვების გზით იღებს. ზოგადად,  $z(t)$  იდეოსინკრეტულ ფაქტორულ მწარმოებლურობაში შოკები, როგორც ერთობლივი რისკის წყარო. შეიძლება მისდევდეს AR(1) პროცესს, ან დროითი მწკრივების უმარტივეს პირველი რიგის ავტორეგრესიულ მოდელს, სადაც შოკი ( $\varepsilon$ ) წარმოადგენს დამოუკიდებელ და ერთნაირად განაწილებულს:  $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2)$ , ანუ გააჩნია ნულოვანი საშუალო მნიშვნელობა და მუდმივი დისპერსია. ასეთი შოკი არ არის დამოკიდებული წინა დამოუკიდებელ შოკებზე და ყველა მათგანს გააჩნია ალბათობების ერთნაირი განაწილება. ეს მოდელი შერჩეულია იმ მოსაზრებით, რომ ამ სახის შოკები ხშირად გამოიყენება ეკონომიკაში არაპროგნოზირებადი (არაგანჭვრეტადი) მოვლენების წარმოდგენისათვის, კერძოდ, საერთო მწარმოებლურობის ან შრომის ნაყოფიერების მოულოდნელი ცვლილებების აღწერისათვის. ის შეიძლება უკავშირდებოდეს სახელმწიფო ხარჯების მოულოდნელი ცვლილების გამო გადასახადების მოულოდნელ ცვლილებასაც.

განვიხილოთ ფირმის ევოლუცია (განვითარება) დროთა განმავლობაში (დროში) არაწრფივი დინამიკური მოდელის საფუძველზე. დროის ნებისმიერ  $t$  მომენტში,  $t_0 \leq t \leq T$ , სადაც  $t_0$  საწყისი დროა, როცა ფირმის მდგომარეობაზე (ან ქცევაზე) დაკვირვებას (შესწავლას) ვიწყებთ, ხოლო  $T$  – დროის სასრული მომენტია. ამდენად, დროის  $[t_0, T]$  ინტერვალში დროის მონაკვეთია, რა ინტერვალშიც ფირმის მდგომარეობა შეისწავლება. ეს პერიოდი, როგორც წესი, დამოკიდებულია კვლევის საგანსა და მიზნებზე (თვე, კვარტალი, ნ/წელი, წელი და ა.შ.). ფირმის არაწრფივი დინამიკური მათემატიკური მოდელის აგება მოვახდინოთ შემდეგი ეკონომიკური მოსაზრებებიდან გამომდინარე: დავუშვათ, რომ

ფირმის მდგომარეობა სრულად აღიწერება ე.წ. მდგომარეობის ცვლადებით, რომელთა რაოდენობაც შესასწავლი ობიექტის (ჩვენ შემთხვევაში, ფირმის) სახესა და შესწავლის (კვლევის) მიზნებზეა დამოკიდებული. ცხადია, მდგომარეობის ცვლადები ისე უნდა შეირჩეს, რომ შესასწავლ ობიექტსა და შესწავლის მიზანს ყველაზე არსებითი მხრიდან ახასიათებდეს.

ნაშრომში შეისწავლება ფირმის მდგომარეობა, რომელიც ეკონომიკური ხასიათის საქმიანობას ეკონომიკური მოგების მიღების მიზნით ახორციელებს და გვანტერესებს ფირმის ეფექტურობა და მისი საქმიანობის მდგრადობა (მდგრადი საქმიანობა, მის მოქმედებაში დიდი რყევებისა და საქმიანობის უნარის დაკარგვის გარეშე). შეიძლება ჩავთვალოთ (დავუშვათ, ვივარაუდოთ), რომ დროის ნებისმიერ  $t$  მომენტში, ფირმის მდგომარეობა შეიძლება სრულად იქნეს დახასიათებული მდგომარეობის შემდეგი ცვლადებით: (1) **ფირმის ფიზიკური კაპიტალი ფულად გამოსახულებაში**, – ავლნიშნოთ  $k$  ასოთი (შენობა-ნაგებობები, მანქანა-დანადგარები, მოწყობილობები და ა.შ.). ცხადია, კაპიტალი ასევე დროის უწყვეტი ფუნქცია იქნება:  $k = k(t)$ . (2) **ფირმის საქმიანობაში მეორე მნიშვნელოვანი ფაქტორი** – ეს არის შრომა (ან სამუშაო ძალა, ან შრომითი რესურსები). კომპანიისთვის ეს არის სხვადასხვა კვალიფიკაციისა და პროფესიის დაქირავებული მუშაკების ერთობლიობა (საერთო რიცხოვნობა). დროის ნებისმიერ  $t$  მომენტში კომპანიაში მომუშავეთა საერთო რიცხოვნობა აღნიშნული გვაქვს  $\ell(t)$ -ით (*ინგლ. სიტყვიდან „labor“*). (3) **ფირმის სასესხო კაპიტალი (ვალი)**. დროის  $t$  მომენტისთვის ფირმის ვალის ფულად გამოსახულებაში ავლნიშნოთ  $d(t)$ -თი (*ინგლ. სიტყვიდან „Debt“*). ივარაუდება, რომ ინვესტიციური დანახარჯები ფინანსდება იმ სახსრების საფუძველზე, რომლებიც ფინანსურ ბაზრებზე  $r(t)$  საპროცენტო განაკვეთით მიიღება (ზოგად შემთხვევაში, ცხადია, იგი ცვლადი სიდიდეა). სასესხო კაპიტალი, ანუ ვალი – ეს კომპანიის მდგომარეობის ის ერთ-ერთი უმნიშვნელოვანესი მაჩვენებელია, რომელიც განსაზღვრავს მისი მოქმედების თავისუფლების ხარისხს გაფართოებისა თუ ახალი საინვესტიციო პროექტების რეალიზაციის მიმართულებით და არსებით გავლენას ახდენს ფირმის მიერ მისაღებ გადაწყვეტილებებზე. ვვარაუდობთ, რომ ფირმის განვითარებისა და ეფექტურად ფუნქციონირებისთვის გამოიყენება როგორც საკუთარი, ისე სასესხო კაპიტალი. (4) **ფირმის მოგება**, რომელიც ავლნიშნოთ  $\pi(t)$ -ით. ეს ის ძირითადი მაჩვენებელია, რომლისთვისაც იღწვის ფირმა და მის ერთ-ერთ უმნიშვნელოვანეს მიზანს წარმოადგენს

შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნები:

$$k(t) \equiv x_1(t), \ell(t) \equiv x_2(t), d(t) \equiv x_3(t), \pi(t) \equiv x_4(t), \quad (2.2)$$

რომლებიც წარმოადგენს ფირმის მდგომარეობის ოთხგანზომილებიანი  $\mathbf{X}$  ვექტორის კოორდინატებს:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} K(t) \\ L(t) \\ D(t) \\ \pi(t) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

ამდენად, ვთვლით, რომ ფირმის მდგომარეობა აღიწერება სრულად და ცალსახად, თუ დროის ნებისმიერ  $t$  მომენტში, სადაც  $t_0 \leq t \leq T$ , ცნობილია ფირმის მდგომარეობის ოთხ-განზომილებიანი ვექტორი  $\mathbf{X}(t)$ . ჩავთვალოთ, რომ  $t$  დროის მოცემულ საწყის მომენტში კომპანიის კაპიტალი ( $k$ ), მუშაკთა რიცხოვნობა (ან შრომა) ( $\ell$ ), ფირმის მიერ აღებული ვალის მთლიანი მოცულობა ( $d$ ) და ფირმის მოგება ( $\pi$ ) ცნობილია, ანუ

როცა  $t = t_0$ ,

$$k(0) = k_0, \ell(0) = \ell_0, d(0) = d_0, \pi = \pi_0. \quad (2.4)$$

მათი განსაზღვრისა და ურთიერთკავშირის დადგენისთვის, თითოეული მდგომარეობის ცვლადისთვის მივიღოთ დიფერენციალური განტოლება.

### III. განტოლებები მდგომარეობის ცვლადებისათვის

ფირმა ქირაობს სამუშაო ძალას სრულყოფილად კონკურენტულ შრომის ბაზარზე ანაზღაურების მიმდინარე (ან სპოტური) განაკვეთით  $w(t)$ , ყიდის საკუთარ პროდუქციას  $p(t)$  ფასით, ყიდულობს საინვესტიციო საქონელს  $q(t)$  ფასით, აწარმოებს პროდუქციას (2.1) საწარმოო ფუნქციით, გასცემს დივიდენდებს შინამეურნეობებზე წონასწორული რეალური საპროცენტო განაკვეთით  $r(t)$  რომელიც, ზოგადად, წარმოადგენს შინამეურნეობების – ფირმაში აქციების მფლობელების დისკონტირების კოეფიციენტს (სტოქასტიკური პროცესების განხილვის შემთხვევაში – სტოქასტიკურ კოეფიციენტს). მაშასადამე, ფირმის ორიენტაცია ეყრდნობა  $\mathbf{p}(t) = (r, p(t), w(t), q(t))$  ფასების ვექტორისა და  $z(t)$  მწარმოებლურობის ტრაექტორიებს, ეჯახება მწარმოებლურობის დროში ცვალებად იდეოსინკრეტულ რისკს  $e(t)$ , ახდენს ინვესტირებას, იყენებს სამუშაო ძალას, იხდის დივიდენდებს, ყიდულობს კაპიტალს ფასით  $q(t)$  და ზრდის ურისკო ვალს  $d(t)$ . თუ ფირმა წონასწორულ მდგომარეობაშია და მისი საქმიანობა წონასწორობაში მყოფი ეკონომიკის შიგნით ვითარდება, მაშინ

$$y(t) \equiv f(z(t), k(t), \ell(t)) = C(t) + I(t), \quad (2.5)$$

სადაც  $C(t)$  – საბოლოო მოხმარებაა, ხოლო  $I(t)$  – ინვესტიციები. აქციების გამოშვება შეზღუდულია დივიდენდების გაცემის ქვედა ზღვარით, ხოლო ფირმის მაქსიმალური საკრედიტო მხარე შეზღუდულია ან  $q(t) \cdot k(t)$ -ზე გირაოს გათვალისწინებით, ან ფულადი ნაკადების შეზღუდვით, დამოკიდებულია კომპანიის შემოსავლებზე  $\pi(t)$ . აღნიშნული დაშვებების საფუძველზე მივიღოთ დიფერენციალური განტოლებები მდგომარეობის თითოეული ცვლადის მიმართ ზემოთ განხილული საწყისი პირობებით.

### კაპიტალი

ვივარაუდოთ, რომ ინვესტიცია მოცემულია როგორც გამოშვებაში ფირმის მოგების წილის ( $\hat{\pi}(t) = \pi(t)/y(t)$ ) ზოგადი ფუნქცია  $\kappa(\hat{\pi})$ ;  $0 \leq \kappa(\hat{\pi}) \leq 1$ , მაშინ  $I(t) = \kappa(\hat{\pi}) \cdot y(t)$ . მაგალითად, თუ დაზოგვის ნორმა  $s$  მოცემულია ეგზოგენურად და განსახილველ პერიოდში რჩება მუდმივი, მაშინ  $\kappa(\hat{\pi}) \equiv s$  და ეს  $s$  ნაწილი მიიმართება კაპიტალში ინვესტიციებზე, ხოლო  $(1-s)$  ნაწილი მოიხმარება ფირმის მიერ, მათ შორის საკუთარი ოპერაციული პროცესების დაფინანსებისათვის, და ამდენად,

$$I(t) = s \cdot y(t), \quad 0 \leq s \leq 1.$$

სტაბილურ პირობებში ინვესტიციების ქვედა ზღვარი განისაზღვრება მარტივი კვლავწარმოების უზრუნველყოფის მოთხოვნიდან (ურისკო ვარიანტი). დამატებითი ინვესტიციების შესახებ გადაწყვეტილების მიღებისას ფირმა დგება სხვა ფუნდამენტური ხასიათის დილემის წინაშე, რომელიც ფირმის დროითშორის არჩევანს უკავშირდება: „რა უფრო პრიორიტეტულია ფირმისათვის: მიმდინარე მოხმარება, თუ მოხმარება მომავალში, - ანუ როგორ გაანაწილოს გამოშვება ფირმის მოხმარებასა და ინვესტიციებს შორის!“ სხვა სიტყვებით, მიღებული შემოსავლები მიმართოს მიმდინარე მოხმარებაზე, თუ ნაწილი მიმართოს ინვესტიციებზე და ნაწილი მიმდინარე მოხმარებაზე. მიმდინარე დროში (აწმყოში)  $I$  ინვესტიციების ზრდას მივყავართ მოხმარების არასასურველ შემცირებამდე, რაც ახშობს გადახდისუნარიან მოთხოვნას  $C$  (იხ. განტოლება (2.5)) და პირიქით – გადახდისუნარიანი მოთხოვნის გაზრდა (ხელფასის დონის) შესაძლებელია მხოლოდ  $I$  ინვესტიციების შემცირების ხარჯზე. მაგრამ ფირმაში მოხმარების შემცირებას თავისი საზღვრები აქვს, რაც ფირმის ოპერაციული საქმიანობის მასშტაბითა და ფირმის დივიდენდური პოლიტიკით განისაზღვრება. მასშტაბიდან კლებადი უკუგება შეიძლება ახსნილი იქნეს სწორედ როგორც მეწარმეებისთვის უფრო დიდი ოპერაციების მართვისას შემცირებული უკუგების (შემოსავლის) შედეგი (Yann Koby and Christian K. Wolf, 2020). ამიტომ, საბოლოო ჯამში, ფირმის გამოშვება მიისწრაფვის რაღაც მდგრადი ბალანსისკენ მოხმარებასა და ინვესტიციებს შორის, რომელიც (წონასწორობა!) პერიოდულად ირღვევა სხვადასხვა შოკების ზემოქმედებით (Schumpeter J.A., 1939).

გარდა ამისა, ინვესტიციების განხორციელება ფირმას მომავლის შეფასების და მომავალი სარგებლიანობის მიმდინარე მომენტში შეფასების აუცილებლობის წინაშე აყენებს, რაც სარგებლიანობის დისკონტირებას, მომავალი ფულადი ნაკადებისა და ფირმის პროდუქციაზე მომავალში გადახდისუნარიანი მოთხოვნის სტრუქტურის შესახებ საკმარისად კარგ წარმოდგენას მოითხოვს. მიუხედავად იმისა, რომ ეს ყველაფერი დღეს, მიახლოებით, მაგრამ საკმარისად კარგი მონაცემებისა და ინფორმაციის ბაზაზე შეიძლება იქნეს პროგნოზირებული (შეფასდეს რისკის ხარისხი და ზომა და ა.შ.), არ არის გამორიცხული იმის ალბათობაც (ესეც შესაფასებელია!), რომ ფირმის დაგეგმილ გამოშვებაზე, გარე და შიდა შოკების ზემოქმედებით, მომავალ პერიოდებში, გადახდისუნარიანი მოთხოვნა, შეიძლება, არც კი იყოს. ეს კი ფირმის წინაშე თავისთავად აყენებს საკითხს: თუ ინვესტიციები არასწორად იქნა განხორციელებული და გამართლებული (ანუ ვერ

უზრუნველყოფს დანახარჯების უკუგებას, რომ არაფერი ვთქვათ დამატებით შემოსავლებზე), – იგი გადაიქცევა წმინდა დანაკარგებად (ზარალად). ფირმებისა და სხვა ეკონომიკური აგენტებისთვის სწორედ ეს რისკი ხდება ინვესტიციების განხორციელების შემაკავებელი.

ფირმის მიერ განხორციელებული ინვესტიციები მიიმართება წარმოების აუცილებელ განახლებაზე და ახდენს დაზღვა-დანადგარების, შენობა-ნაგებობების, ინფრასტრუქტურისა და ა.შ. ცვეთაზე ბუნებრივი გასვლის კომპენსაციასა და ძირითადი კაპიტალის (ფონდების) განახლებას, რაც უზრუნველყოფს ფირმის საწარმოო პროცესის უწყვეტობას. ფირმის გამოშვების (წარმოებული პროდუქციის) დამოკიდებულება კაპიტალის მარაგზე (ან ძირითად ფონდებზე) საწარმოო ფუნქციით აღიწერება. ლოკალურად, მხოლოდ ძირითად ფონდებზე დამოკიდებულებით, საწარმოო ფუნქციას ასეთი სახე ექნებოდა:  $y(t) = f(k(t))$ . გასაგებია, რომ ინვესტიციების შემცირება მომავალში ფირმას მიიყვანს კაპიტალის მარაგების (ძირითადი ფონდების) შემცირებამდე, რაც თავისთავად ფირმის გამოშვების (წარმოებული პროდუქციის) შემცირებას გამოიწვევს, ეს უკანასკნელი კი ფირმის მოხმარების შემცირებამდე მიიყვანს და მას არაერთი პრობლემის წინაშე დააყენებს, რაც, უპირველეს ყოვლისა, ფირმის ფინანსურ პრობლემასთან იქნება დაკავშირებული. ფირმას ან ვალის აღების (ან ვალის გაზრდის, თუ მას ადრე ჰქონდა აღებული ვალები) წინაშე დააყენებს, რაც ფირმის ფინანსურ რისკს ზრდის და ამვირებს მისთვის ახალი კაპიტალის ღირებულებას, და/ან ფირმის პრობლემებში ღრმად გარკვევისა და მის საქმიანობაში რადიკალური ცვლილებების შეტანას განაპირობებს. ერთი რამ ცხადია: ყველა სხვა უცვლელი პირობების შემთხვევაშიც კი, ინვესტიციების შემცირების ეფექტი გარდაუვალად ნეგატიური იქნება.

ზემოაღნიშნულის საფუძველზე ვასკვნით, რომ კაპიტალის ნაზრდი პროპორციულია იმ შემოსავლისა, რომელიც, ერთი მხრივ, კაპიტალში ინვესტირებული თანხის უკუგებითა და, მეორე მხრივ, აღებული კრედიტით გაზრდილი კაპიტალიდან ( $cd(t)$ ) უკუგებით მიიღება, სადაც  $c$  – რაღაც მუდმივია. თუ ცვეთის ნორმას ავლნიშნავთ  $\delta \geq 0$  ასოთი, მაშინ მოცემული კაპიტალის ცვეთა იქნება  $\delta \cdot k(t)$ :  $\delta$  – მოცემული პარამეტრია, რომელიც განსახილველ პერიოდში რჩება მუდმივი. მაგრამ კაპიტალს და აღებულ კრედიტს თან ახლავს დანახარჯები (კრედიტის მომსახურების ხარჯები) და მუშაკთა შრომის ანაზღაურება. სიმარტივისთვის ჩავთვალოთ, რომ მხოლოდ ბოლო ორს ვითვალისწინებთ და თანაც, მათი ერთობლივი გავლენის ვარაუდით. მაშინ დანახარჯები კრედიტზე და ხელფასზე იქნება  $(-b \cdot k(t) \cdot \ell(t))$ , სადაც  $b$  – რაღაც მუდმივია. მაშინ დროის ნებისმიერ  $t$  მომენტში კაპიტალის ნაზრდი იქნება

$$\frac{\partial k(t)}{\partial t} = z(t) \cdot e(t) \cdot \kappa(\hat{\pi})(k(t)^\alpha \ell(t)^\beta)^\nu - \delta \cdot k(t) - b \cdot k(t) \cdot \ell(t), \quad (I)$$

როცა  $t = 0$ ,  $k(t_0) = k_0$ .

მაშასადამე, (I) წარმოადგენს ფირმის კაპიტალის განტოლებას მოცემული საწყისი პირობით. წარმოებაში ინვესტირებული გამოშვების ერთეული ზრდის კაპიტალის მარაგს

ერთეულზე და განსაზღვრავს წმინდა ინვესტიციების სიდიდეს, ანუ ინვესტიციების მხოლოდ იმ ნაწილს, რომელიც მიიმართება კაპიტალის ზრდაზე, ანუ  $t$  პერიოდის განმავლობაში კაპიტალის ცვლილება  $\dot{k}(t) \equiv \partial k(t)/\partial t$  მოიცემა როგორც  $t$  პერიოდში მთლიან ინვესტიციებს  $I(t) = y(t) - C(t)$  მინუს მოძველებული კაპიტალის ცვეთა, ცვეთის  $\delta$  ნორმით და არაწრფივი ეფექტი<sup>1</sup>.

საერთოდ, ზრდის მოდელების, რომელსაც ჩვენ ფირმებთან მიმართებაშიც ვიყენებთ, დასკვნების ზოგადობის შემზღვეველი არის ის, რომ შენაცვლების დამუშავება, ძირითადად, შემოიფარგლება შემთხვევებით, რომ შრომა და კაპიტალი სრულად ურთიერთშემნაცვლებელია (ანდა ერთია, (იხ. Dowrick S., Pitchford R., Turnovsky S.J. (2004)). ეს შეზღუდვა წესდება კობბი-დუგლასის საწარმოო ფუნქციით (*the Cobb-Douglas production function*), რომელსაც ჩვენ ფირმის არაწრფივი დინამიკის მოდელის აგებისათვის ვიყენებთ. თუ ჩვენს მოდელში კობბი-დუგლასის ფუნქციას შევცვლით სხვა საწარმოო ფუნქციით, რომელიც შენაცვლების ელასტიურობამ შეიძლება მიიღოს ნებისმიერი მნიშვნელობა 0-დან  $\infty$ -მდე, მაშინ შენაცვლების ელასტიურობაზე დამოკიდებულებით, შესაძლებელია ფირმის გამოშვების ზრდის სხვადასხვა ტრაექტორიები. ამ ყველაფერს მივყავართ ფირმის შემოსავლების ზრდამდე და ფირმის მიერ განხორციელებული ინვესტიციების ფარდობის გადახედვამდე.

### შრომა

ბუნებრივია იმის დაშვება, რომ, ერთი მხრივ, დროთა განმავლობაში (დროში) მუშაკთა რაოდენობა შეიძლება შემცირდეს (ან გაიზარდოს) ან სამუშაოდან განთავისუფლების გამო ან შრომითი რესურსის ამოწურვის (პენსიაზე გასვლა) ან მოსახლეობის მიგრაციის გამო. ჩავთვალოთ, რომ დროთა განმავლობაში მუშაკთა რაოდენობა იკლებს, მაშინ მუშაკთა რიცხოვნობის ზრდის ტემპი  $n(t)$ ,  $0 \leq t \leq T$ , იქნება არა მუდმივი, არამედ მონოტონურად კლებადი ფუნქცია. სიმარტივისთვის, თუ მუშაკთა დღევანდელი რიცხოვნობის ნორმალიზებას მოვახდენთ ერთისკენ, ეს პროცესი შეიძლება ასე ჩავწეროთ:  $(e^{-m} \ell(t))$ , სადაც  $m > 0$  და  $-m \leq n(t) < 0$ . ცხადია, მუშაკების ზრდისას ამ გამოსახულებაში ნიშანი „-“ შეიცვლება ნიშნით „+“.

ბუნებრივია, რომ ფირმაში, დროის ნებისმიერ  $t$  მომენტში მუშაკთა რაოდენობა პროპორციულია კაპიტალის  $(k(t))$  და ფირმის მიერ აღებული ვალის  $(d(t))$ , – ცხადია, თუ დროის ამ მომენტისათვის ასეთს ექნება ადგილი. ეს შეიძლება გამოვსახოთ წრფივი

<sup>1</sup> შევნიშნოთ, რომ საწარმოო ფუნქციის შენაცვლების მუდმივი ელასტიურობა ცენტრალური დამოკიდებულებებია როგორც თეორიულ, ისე რაოდენობრივ მაკროეკონომიკაში. შენაცვლების მაღალი ელასტიურობისათვის წონასწორობა (*the equilibrium*) მის მოდელში შეიძლება მუდმივ ზრდას მოიცავდეს! წარმოების იზოკვანტების ფორმის ერთ-ერთი მაჩვენებელი არის ფაქტორებს შორის შენაცვლების ელასტიურობა, რომელიც იცვლება 0-დან  $\infty$ -მდე, და გულისხმობს, რომ თუ ელასტიურობა ნულის ტოლია, არანაირი შენაცვლება არ არის შესაძლებელი, და თუ შენაცვლება უსასრულოდ ტოლია, მაშინ წარმოების ფაქტორები წარმოადგენს სრულყოფილად შემნაცვლებელს და გვაქვს ე.წ. სრულყოფილი შენაცვლება (*perfect substitutions*).

დამოკიდებულებით პროპორციულობის მუდმივი კოეფიციენტების გამოყენებით, კერძოდ,  $a_1K(t) + a_2D(t)$ , სადაც  $a_1$  და  $a_2$  რაღაც მუდმივებია. მაგრამ თუ წარმოვიდგენთ, რომ კომპანიაში არსებული ფიზიკური კაპიტალი და ფირმის მიერ აღებული სასესხო კაპიტალი (ანუ ვალი) ერთობლივ გავლენას ახდენს მუშაკების რიცხოვნებაზე, მუშაკების ზრდა უფრო რთული ხასიათის დამოკიდებულებით შეიძლება გამოისახოს, კერძოდ,  $\ell(t) = a \cdot k(t) \cdot d(t)$ . მაშასადამე, დროის  $t$  მომენტისათვის ფირმაში მომუშავეთა ნაზრდი (ნამეტი) იქნება

$$\frac{\partial \ell(t)}{\partial t} = a \cdot k(t)d(t) - e^{-mt} \ell(t). \quad (\text{II})$$

### კომპანიის სასესხო კაპიტალი (ვალი)

ახლა გამოვიყვანოთ ვალის დინამიკის განტოლება, ავღწეროთ ფირმის დავალიანების (ვალის) ზრდა დროში. თუ ფირმა თავის განსახორციელებელ ახალ პროექტებზე დამატებით ახალ ვალდებულებებს იღებს, ეს შეიძლება იყოს საბანკო კრედიტი, ფასიანი ქაღალდების ემისიით აღებული ვალდებულებები და/ან სხვა რამ, რომელიც, სავარაუდოდ, ფირმის კაპიტალის პროპორციულია და ეს შეიძლება ჩაიწეროს როგორც  $ek(t)$ , სადაც  $e$  – რაღაც პარამეტრია (ცხადია, ამით ვუშვებთ, რომ ფირმას **პონცის თამაშის** შესაძლებლობა არა აქვს). ამ ვალზე განხორციელებული დანახარჯები ზემოთ უკვე ავღნიშნეთ  $r(t)$ -თი. მაშინ დროის  $t$  მომენტისათვის ფირმაში სასესხო კაპიტალის (ვალის) დინამიკა შეიძლება ასე ჩაიწეროს:

$$\frac{\partial(d(t))}{\partial t} = g \cdot k(t) - r(t)(d(t)), \quad (\text{III})$$

სადაც  $g$  – პროპორციულობის რაღაც მუდმივი კოეფიციენტი; ფინანსური კაპიტალის ბაზარზე დროის  $t$  მომენტში მიღებული დამატებითი სესხის მიღების შემთხვევაში, სესხის ჯამური თანხა  $r(t)$  საპროცენტო განაკვეთით, შეიძლება წარმოვიდგინოთ ფირმის მიერ დროის მოცემულ მომენტში გამოშვებული ობლიგაციების ერთობლიობით. ცხადია, თუ ფირმას დროის  $t$  მომენტისათვის დიდი ვალი აქვს, ახალი კრედიტების მიღებას თან ახლავს პრობლემების წარმოქმნა, რადგან აუცილებელი იქნება აღებულ კრედიტზე დიდი საპროცენტო მომსახურების თანხის გადახდა.

რეალურ პრაქტიკაში ამ სახსრების არსებითი ნაწილი თვითდაფინანსებით არის უზრუნველყოფილი. ამასთან, ეს დეტალურობა მოდელში პრინციპული ცვლილებების შეტანას არ მოითხოვს, რადგან აქციონერების მიერ გაკეთებული ინვესტიციური დანახარჯები მოცემული კომპონენტის მიმართ, დროებითი დანახარჯების საერთო მეთოდოლოგიური პრინციპიდან გამომდინარე, ჩანადებების რენტაბელობის ანალოგიური ანალიზია (იგივე  $r(t)$  საპროცენტო განაკვეთით) შესაძლებელი.

**ფირმის მოგება**

ფირმის მოგებისათვის (შემოსავლებისათვის)  $\pi(t)$ , რომელიც ასევე ცნობილია როგორც „წმინდა შემოსავალი“, გამოვიყენოთ შემდეგი გამოსახულება

$$\pi(t) = (1 - \tau(t))\{y(t) \cdot p(t)[1 - n(t)] - S(t) - w(t) \cdot \ell(t) - A(d(t), a)\} - r(t) \cdot d(t) - D_A(t) + N(t) + M(t) - I(t)$$

სადაც:  $\tau(t)$  – კორპორაციული გადასახადის განაკვეთია;  $0 < n < 1$  – გაყიდული საქონლის საერთო თვითღირებულების წილი ამონაგებში;  $S(t)$  – კომერციული, საერთო-სამეურნეო და ადმინისტრაციული ხარჯები,  $w(t)$  – შრომის ანაზღაურების განაკვეთი,  $r(t)$  – პროცენტები (სასესხო თანხის ღირებულება),  $D_A(t)$  – ძირითადი საშუალებების ცვეთისა და არამატერიალური აქტივების ამორტიზაციის ჯამი,  $N(t)$  – არაოპერაციული შემოსავალი/ ხარჯები,  $M(t)$  – სპეციალური მუხლები და  $I(t)$  – ნომინალური ინვესტიციები.  $A(d(t), a)$  ასახავს ვალის ღირებულებას ხელიდან გაშვებული შემოსავლის თვალსაზრისით. ეს დანახარჯები შეიძლება ინტერპრეტირებული იქნეს როგორც აგენტური ან ასიმეტრიული ინფორმაციული დანახარჯები; ვექტორი  $a$  შეიცავს ცვლადების ნაკრებს, რომლებიც წარმოადგენს ვალის ისეთ დანახარჯებს, როგორცაა ფირმის მომგებიანობა და მისი აქტივების ხელშესახეობა. ივარაუდება (Jaremilo, Schantarelli and Weiss, 1996), რომ  $dA/d(d(t)) > 0$  და  $dA^2/d(d(t))^2 > 0$ , ანუ ვალის ზღვრული ღირებულება დადებითია და იზრდება ვალის მიმდინარე მოცულობაში.

შევნიშნოთ, რომ არაოპერაციული შემოსავალი წარმოიქმნება მეორად ბიზნესთან დაკავშირებული საქმიანობიდან, გარდა იმ შემთხვევებისა, როდესაც ეს საქმიანობები ბიზნესის ჩვეულებრივ ოპერაციების ნაწილად ითვლება, როგორცაა შემოსავალი დივიდენდებიდან, შემოსავალი იჯარიდან, ვალუტის კურსების სხვაობის კორექტირება და ა.შ. სპეციალური მუხლები – ეს არის უჩვეულო ან ერთჯერადი (არარეგულარული) მუხლები, რომლებიც კომპანიის მიერ გადასახადების დაფარვამდეა წარმოდგენილი. მაგალითად, წყალდიდობით, ხანძრითა და სხვა სტიქიური უბედურებებით გამოწვეული დანაკარგები; რეპუტაციის (გუდვილის) გაუფასურება, არამორტიზებული არამატერიალური აქტივები. ეს მონაცემი შეიძლება იყოს 5%-მდე (უარეს შემთხვევაში): იგი გამოითვლება როგორც  $N(t)$ -სა და  $M(t)$ -ს ჯამი, გაყოფილი საერთო გაყიდვებზე. მაშინ მოგების ცვლილება დროში შეიძლება ასე ჩაიწეროს:

$$\frac{\pi(t)}{\partial t} = (1 - \tau(t))\{y(t) \cdot p(t)[1 - n(t)] - S(t) - w(t) \cdot \ell(t) - A(d(t), a)\} - r(t) \cdot d(t) - D_A(t) + N(t) + M(t) - I(t). \tag{IV}$$

#### IV. ფირმის არაწრფივი დინამიკური მოდელის ვექტორულ-მატრიცული სახე

მდგომარეობის თითოეული ცვლადის მიმართ ზემოთ მიღებული დიფერენციალური განტოლებები (I), (II), (III) და (IV) საწყისი პირობებით (2.4), გადავწეროთ ზემოთ შემოღებული აღნიშვნების გამოყენებით. გვექნება:

$$\frac{\partial x_1(t)}{\partial t} = z(t) \cdot e(t) \cdot \kappa(\hat{\pi}) \cdot (x_1(t)^\alpha x_2(t)^\beta)^\nu - \delta \cdot x_1(t) - b \cdot x_1(t) \cdot x_2(t),$$

$$\frac{\partial x_2(t)}{\partial t} = a \cdot x_1(t) x_3(t) - e^{-mt} x_2(t),$$

$$\frac{\partial (x_3(t))}{\partial t} = g \cdot x_1(t) - r(t)(x_3(t) + \Delta(x_3(t))),$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_4(t)}{\partial t} = & (1 - \tau(t)) \{ y(t) \cdot p(t)[1 - n(t)] - S(t) - w(t) \cdot x_2(t) - A(x_3(t), a) \} - \\ & - r(t) \cdot x_3(t) - D_A(t) + N(t) + M(t) - I(t). \end{aligned}$$

სადაც

$$y(t) = z(t) \cdot e(t) \cdot (x_1(t)^\alpha (t) \cdot x_2(t)^\beta)^\nu.$$

ეს სისტემა შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგი ვექტორულ-მატრიცული სახით:

$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} = \mathbf{f}(\mathbf{X}, t), \quad t \in [t_0, T], \quad t \geq 0. \quad (4.1)$$

$$\text{როცა } t = t_0 : \mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0, \quad (4.2)$$

სადაც

$$\mathbf{f}(\mathbf{X}, t) = \begin{pmatrix} f_1(\mathbf{X}, t) \\ \vdots \\ f_4(\mathbf{X}, t) \end{pmatrix}$$

$\mathbf{f}$  – უწყვეტად დიფერენცირებადი არაწრფივი ვექტორ-ფუნქცია, რომლის ელემენტებიც ცხადად ჩანს შესაბამისი განტოლებებიდან.

მიღებული განტოლებათა სისტემა წარმოადგენს ფირმის არაწრფივ დინამიკურ მოდელს, რომელიც აღწერს ფირმის მდგომარეობას დროში და იმ ეფექტებს, რომლებიც თან ახლავს ფირმის საქმიანობას, მათ შორის მდგომარეობის დაკარგვას, რხევებსა და სხვა დინამიკურ ეფექტებს. მიღებული სისტემა საწყისი პირობებით წარმოადგენს კომპის ამოცანას, რომელიც იხსნება რიცხვითი მეთოდით, სტანდარტული პროგრამის პროგრამების გამოყენებით! მდგრადობა განიხილება **ლიაპუნოვის მიხედვით**: ანუ სისტემა  $\mathbf{X}^*$  წონასწორობის მიმართ იწოდება მგრადად, თუ ნებისმიერი  $\varepsilon > 0$ -თვის და დროის ნებისმიერ საწყის  $t_0 > 0$  მომენტში, მოიძებნება ისეთი  $\delta(\varepsilon, t_0)$ , რომ  $\|\mathbf{X}_0\| < \delta$ , საიდანაც გამომდინარეობს რომ  $\mathbf{X}(t) < \varepsilon$  როცა  $t \geq t_0$ . სხვა სიტყვებით, სისტემა იმოდრავებს გარკვეულ მილაკში, რომლის რადიუსიც

არ აღემატება  $\varepsilon$ -ს. რადგან სისტემა არაწრფივია და მოსალოდნელია ამონახსნის ძლიერ არაწრფივობა, იმისათვის, რომ რიცხვითი თვლისას არ დაიკარგოს სიზუსტე და არ მოხდეს პროცესის განშლა, ყურადღებას მოითხოვს ამონახსნის სიზუსტის კონტროლი: კომის ამოცანის ამოხსნისას, არასაკმარისი სიზუსტე შეიძლება გახდეს არასწორი დასკვნების გაკეთების საფუძველი. ამდენად, ასეთ არაწრფივ ამოცანებში არსებობს აუცილებელი სიზუსტით ამოხსნის აუცილებლობა, რომ სრულდებოდეს პირობა  $X(t) < \varepsilon$ .

ფირმის საერთო კაპიტალის სტრუქტურა და მისი ღირებულების შესახებ წარმოდგენები ცალკე განხილვის საგანს წარმოადგენს.

### გამოყენებული ლიტერატურა

- გიორხელიძე, დ. (2021). *თანამედროვე (უმაღლესი) მაკროეკონომიკა*. თბილისი. 714 გვ.
- Fattouh, B., Harris, L. & Scaramozzino, P. (2005). Non-Linearity in the Determinants of Capital Structure: Evidence from UK Firms.
- Dowrick S., Pitchford R. & Turnovsky S.J. (2004). *Economic Growth and Macroeconomic Dynamics: Recent Developments in Economic Theory*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Eeckhout, J. (2024). *The Value and Profits of Firms*.  
[https://www.janeeckhout.com/wp-content/uploads/Value\\_Profits\\_Firms.pdf](https://www.janeeckhout.com/wp-content/uploads/Value_Profits_Firms.pdf)
- Eklund, J.E. (2008). *Corporate Governance, Private Property and Investment*. JIBS Dissertation Series (No. 049).
- Jaramillo, F., Schiantarelli, F. & Weiss, A. (1996). Provide an Application of an Agency Cost Function to The Optimization Program of The Firm.
- Carvalho, V. & Grassi, B. (2014). Large Firm Dynamics & Business Cycle. *American Economic Review*, 109(4), pp. 1375-1425.
- Roldan, P. (2016). *Notes on FIRM DYNAMICS*. NY University.  
<https://bpb-us-e1.wpmucdn.com/wp.nyu.edu/dist/e/3790/files/2016/03/notes-3.pdf?bid=3790>
- Board, S. (2009). *Firm's Problem* (Lecture Notes).  
[http://www.econ.ucla.edu/sboard/teaching/econ11\\_09/econ11\\_09\\_lecture5.pdf](http://www.econ.ucla.edu/sboard/teaching/econ11_09/econ11_09_lecture5.pdf)
- Schumpeter, J.A. (1939). *Business Cycles*. N.-Y.  
[https://www.researchgate.net/publication/319503069\\_Schumpeter\\_Joseph\\_Alois\\_1939\\_Business\\_Cycles\\_A\\_Theoretical\\_Historical\\_and\\_Statistical\\_Analysis\\_of\\_the\\_Capitalist\\_Process](https://www.researchgate.net/publication/319503069_Schumpeter_Joseph_Alois_1939_Business_Cycles_A_Theoretical_Historical_and_Statistical_Analysis_of_the_Capitalist_Process)
- Yann Koby, Y. & Wolf, C.K. (2020). *Aggregation in Heterogeneous-Firm Models: Theory and Measurement*. Princeton University.  
[https://economics.mit.edu/sites/default/files/publications/hetfirms\\_agg\\_202007.pdf](https://economics.mit.edu/sites/default/files/publications/hetfirms_agg_202007.pdf)
- Малков, С.Ю. (2010). Экономическая динамика и финансы: макроэкономическое моделирование. *Эволюционная экономика и финансы: конкуренция и экономический рост*, 143-154.  
[https://smalkov.org/sites/smalkov.org/files/article/St\\_10\\_01\\_2.pdf](https://smalkov.org/sites/smalkov.org/files/article/St_10_01_2.pdf)
- Майоров, У.В. & Алексеева, Т.А. (2014). Анализ моделей нелинейной динамики экономических процессов средств. системы MATLAB. *Научно-технические ведомости СПбГПУ. Экономические науки*, 2(192), 200-205.
- Дмитриев, С.В. & Кетова, К.В. (2006). Моделирование динамики открытой макроэкономической системы в условиях научно-технического прогресса в производственной сфере. *Известия Института математики и информатики. Ижевск*, №2(36), 159-162.

## Nonlinear dynamic model of firm stability

**Demur Giorkhelidze**

Grigol Robakidze University

demur.giorkhelidze@gruni.edu.ge

**Abstract.** This article examines a nonlinear dynamic model of firm stability, deriving equations for state variables with corresponding initial conditions. The state variables that fully characterize the firm's state are the total productivity of the firm's factors, the firm's physical capital, labor resources (labor, workforce), the firm's debt, and its profit. For the resulting nonlinear system of differential equations, a solution algorithm and stability criteria are proposed for various control parameters. For a nonautonomous system, stability is considered according to Lyapunov.

**Keywords:** firm, firm state, volatility variables, specific risks, nonlinear differential equations, Cauchy problem, Lyapunov stability